Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

8-й класс

Решения

1. Можно ли расставить в выражении

   2*0*1*2*2*0*1*2*…*2*0*1*2

   (2013 групп вида 2*0*1*2) вместо звёздочек знаки «+» и «–» так, чтобы получилось 2013?

   Ответ: можно.

   Решение.

   В одной группе возможно с помощью указанных операций получить число 1: 2+0+1-2=1. Поставив между 2013 группами знаки «+», получим значение выражения, равное 2013.

2. Петров придумал четыре числа a=209, b=35, c=37 и d=17, прочитал их последовательно:

   Двести девять, тридцать пять,
   Тридцать семь, семнадцать,

   и предложил Васечкину придумать ещё четыре числа e, f, g и h таких, чтобы прочитанные последовательно по строчкам:

   a, b,
   c, d,
   e, f,
   g, h,

   они образовывали четверостишие, в котором первая строка рифмуется с третьей, а вторая – с четвёртой, причём (a-b)=2(e-f), (c-b)=2(g-f), (c-d)=2(g-h). Васечкин задание выполнил. Сможете ли сделать это Вы?

   Ответ: e=112, f=25, g=26, h=16.

   Решение.

   Поскольку первая строка должна рифмоваться с третьей, число f, возможно, заканчивается на пять. Вторая строка рифмуется с

четвёртой, тогда h может быть числом из второго десятка. Кроме того, $18=b-d=(c-d)-(c-b)=2(g-h)-2(g-f)=2(f-h)$, откуда $(f-h)=9$. Подойдут числа $f=25$ и $h=16$. Тогда $e=112$, так как $(a-b)=2(e-f)$, $2e=(a-b)+2f=209-35+50=224$. И $g=26$, поскольку $(c-b)=2(g-f)$, $2g=(c-b)+2f=37-35+50=52$. В итоге получится четверостишие:

Двести девять, тридцать пять,
Тридцать семь, семнадцать,
Сто двенадцать, двадцать пять,
Двадцать шесть, шестнадцать.

Замечание. Возможно, что решение не единственно.

3. Электронный калькулятор оказался неисправен: выполняет только операции сложения, вычитания и получения обратного числа $1/x$. Как с помощью такого калькулятора находить квадраты чисел?

Решение.

Для нахождения квадратов можно воспользоваться равенством

$$x^2 = \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}} - x.$$

4. Найдите прямоугольник с целыми сторонами, площадь которого численно равна периметру.

Ответ: прямоугольник 3 на 6, квадрат 4 на 4.

Решение.

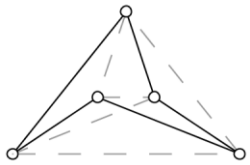
Обозначим стороны прямоугольника a и b. Пусть для определённости $a \le b$. Согласно условию $ab=2(a+b)$. Тогда $ab-2a-2b=0$ или $ab-2a-2b+4=4$, то есть $(a-2)(b-2)=4$. Следовательно, $(a-2)=1$ и $(b-2)=4$ или $(a-2)=2$ и $(b-2)=2$. Получаем два решения: 1) $a=3$ и $b=6$; 2) $a=4$ и $b=4$.

5. Существует ли невыпуклый пятиугольник, у которого никакие две диагонали не имеют общих точек, кроме вершин? Диагональю невыпуклого многоугольника называется отрезок, соединяющий вершины, не являющиеся соседними.

Ответ: существует.

Решение.

Один из вариантов представлен на рисунке.



6. Существует ли такое пятизначное число, что сумма его цифр делится на 13 и сумма цифр числа, на единицу большего, также делится на 13? Если нет – докажите, если да – перечислите все такие числа.

Ответ: 48999, 57999, 66999, 75999, 84999, 93999.

Решение.

Пусть $x = \overline{abcde}$ – искомое число. По условию $(a + b + c + d + e)$ делится на 13. Если $e \neq 9$, то разница между $(a + b + c + d + e)$ – суммой цифр числа x и $(a + b + c + d + e + 1)$ – суммой цифр числа $(x + 1)$ равна 1, а значит обе эти суммы не смогут одновременно делиться на 13. Если $e = 9, d \neq 9$, то сумма цифр числа $(x + 1)$ равна $(a + b + c + d + 1)$ и не будет делиться на 13, поскольку на 8 меньше суммы цифр числа x. Если $c \neq 9, d = 9, e = 9$, то сумма цифр числа $(x + 1)$ равна $(a + b + c + 1)$ и вновь не будет делиться на 13, поскольку на 17 меньше суммы цифр числа x. А в случае $b \neq 9, c = 9, d = 9, e = 9$ сумма цифр числа $(x + 1)$ равна $(a + b + 1)$ и может делиться на 13, поскольку на 26 меньше суммы цифр числа x. Но тогда

число $(a+b+1)$ также должно делиться на 13, что возможно для цифр лишь в случаях $a=4$, $b=8$; $a=5$, $b=7$; $a=6$, $b=6$; $a=7$, $b=5$; $a=8$, $b=4$; $a=9$, $b=3$. Если $b=9$, $c=9$, $d=9$, $e=9$, то сумма цифр числа $(x+1)$ равна $(a+1)$ и не может делиться на 13, так как a – цифра. Число 99999 также не удовлетворяет условию задачи.